2.1 Persamaan dan Ketaksamaan Kuadratik

Menyelesaikan persamaan kuadratik menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua dan rumus

Kebanyakan situasi yang berlaku dalam kehidupan seharian kita adalah berkaitan dengan persamaan. Salah satu persamaan itu ialah persamaan kuadratik. Pertimbangkan situasi ini:

Luas sebuah bingkai gambar yang berbentuk segi empat tepat ialah 100 cm². Jika panjangnya ialah 3 cm lebih daripada lebarnya, tuliskan satu persamaan yang memenuhi situasi ini.

Andaikan lebar bingkai ialah x cm dan panjangnya 3 cm lebih daripada lebar, iaitu $(x + 3)$ cm.

Maka:

$$\begin{aligned} x(x + 3) &= 100 \\ x^2 + 3x &= 100 \\ x^2 + 3x - 100 &= 0 \end{aligned}$$

Perhatikan bahawa persamaan ini mempunyai satu pemboleh ubah x dan kuasa tertinggi pemboleh ubahnya ialah 2. Maka, persamaan ini dikenali sebagai persamaan kuadratik dalam bentuk am. Secara umumnya, suatu persamaan kuadratik bentuk am boleh ditulis sebagai:

$ax^2 + bx + c = 0$ dengan keadaan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$.

Bagaimanakah suatu persamaan kuadratik diselesaikan? Apakah yang dimaksudkan dengan menyelesaikan persamaan kuadratik?

INKUIRI 1 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Meneroka penyelesaian persamaan kuadratik menggunakan perisian geometri dinamik

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik butang *point* dan tandakan A dan B pada titik-titik persilangan graf $y = 3x^2 + 11x - 4$ dengan paksi-x.
3. Catatkan koordinat bagi titik A dan titik B. Kemudian, perhatikan koordinat-x bagi titik A dan titik B itu.
4. Apakah kesimpulan yang dapat dibuat tentang koordinat-x bagi titik A dan titik B itu?
5. Bincang bersama-sama pasangan anda dan kongsi dapatan yang diperoleh dengan rakan yang lain.

bit.ly/2vHjS0Y

Hasil daripada Inkuiri 1, nilai-nilai x pada kedua-dua titik persilangan itu, iaitu $x = -4$ dan $x = \frac{1}{3}$ ialah penyelesaian atau punca-punca bagi persamaan $y = 3x^2 + 11x - 4$ apabila $y = 0$.

Maka, dapat disimpulkan bahawa:

Penyelesaian atau punca-punca bagi persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ ialah koordinat-x bagi titik-titik persilangan antara graf $y = ax^2 + bx + c$ dengan paksi-x.

Anda telah mempelajari cara untuk menyelesaikan persamaan kuadratik menggunakan kaedah pemfaktoran. Selain itu, penyelesaian bagi persamaan kuadratik juga boleh diperoleh dengan menggunakan kaedah **penyempurnaan kuasa dua** dan **rumus**.

A Kaedah penyempurnaan kuasa dua

Contoh 1

Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua.
(a) $x^2 + 4x - 7 = 0$
(b) $-3x^2 + 6x - 1 = 0$

Penyelesaian

(a)
$$x^2 + 4x - 7 = 0$$
$$x^2 + 4x = 7$$
Pindahkan sebutan pemalar di sebelah kanan persamaan
$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 7 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
Tambahkan sebutan $\left(\frac{\text{pekali } x}{2}\right)^2$ di sebelah kiri dan kanan persamaan
$$x^2 + 4x + 2^2 = 7 + 2^2$$
$$(x + 2)^2 = 11$$
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$$x + 2 = \pm\sqrt{11}$$
$$x = -5.317 \quad \text{atau} \quad x = 1.317$$
Maka, penyelesaian bagi persamaan $x^2 + 4x - 7 = 0$ ialah -5.317 dan 1.317.

(b)
$$-3x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$
Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan -3 supaya pekali x^2 menjadi 1
$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$$
$$x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$
Tambahkan $\left(\frac{-2}{2}\right)^2$ di kedua-dua belah persamaan
$$x^2 - 2x + (-1)^2 = -\frac{1}{3} + (-1)^2$$
$$(x - 1)^2 = \frac{2}{3}$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$x = 0.1835 \quad \text{atau} \quad x = 1.8165$$
Maka, penyelesaian bagi persamaan $-3x^2 + 6x - 1 = 0$ ialah 0.1835 dan 1.8165.

IMBAS KEMBALI

Kaedah pemfaktoran
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x + 2)(x + 3) = 0$
$x = -2$ atau $x = -3$

QR

Kaedah pemfaktoran menggunakan jubin algebra.

bit.ly/2ESbxO4

Muzium Matematik

Ahli matematik Parsi, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi menggunakan kaedah yang serupa dengan penyempurnaan kuasa dua untuk menyelesaikan persamaan kuadratik.

2.1.1

B Kaedah rumus

Rumus bagi penyelesaian suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ diberi sebagai:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh 2

Selesaikan persamaan $2x^2 - 2x - 3 = 0$ dengan menggunakan rumus.

Penyelesaian

Bandingkan persamaan yang diberi dengan persamaan bentuk am $ax^2 + bx + c = 0$. Maka, $a = 2$, $b = -2$ dan $c = -3$.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{28}}{4} \quad \text{atau} \quad x = \frac{2 + \sqrt{28}}{4}$$

$$= -0.823 \quad \text{atau} \quad = 1.823$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $2x^2 - 2x - 3 = 0$ ialah -0.823 dan 1.823.

Cabar Minda

Terbitkan rumus kuadratik menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua.

SUMBANG SARAN

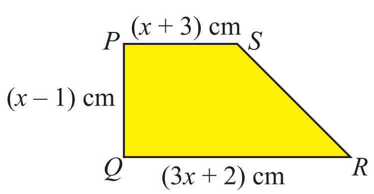
Nyatakan kaedah lain untuk menyelesaikan suatu persamaan kuadratik selain daripada kaedah penyempurnaan kuasa dua dan rumus. Apakah kaedah pilihan anda? Terangkan sebab bagi pemilihan kaedah itu.

Muzium Matematik

Ahli matematik dan astronomi India, Brahmagupta menghasilkan rumus bagi penyelesaian persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ yang setara dengan $x = \frac{\sqrt{4ac + b^2 - b}}{2a}$.

Latih Diri 2.1

1. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
   (a) $x^2 + 4x - 9 = 0$ (b) $x^2 - 3x - 5 = 0$ (c) $-x^2 - 6x + 9 = 0$
   (d) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ (e) $4x^2 - 8x + 1 = 0$ (f) $-2x^2 + 7x + 6 = 0$
2. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan menggunakan rumus. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
   (a) $x^2 - 4x - 7 = 0$ (b) $2x^2 + 2x - 1 = 0$ (c) $3x^2 - 8x + 1 = 0$
   (d) $4x^2 - 3x - 2 = 0$ (e) $(x - 1)(x - 3) = 5$ (f) $(2x - 3)^2 = 6$
3. (a) Panjang pepenjuru bagi sebuah segi empat tepat ialah 10 cm. Jika panjangnya lebih 2 cm daripada lebar, cari ukuran panjang dan lebar segi empat tepat itu.
   (b) Cari ukuran bagi sebuah segi empat tepat dengan perimeter 26 cm dan luas 40 cm^2.
4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $PQRS$ dengan keadaan $PQ = (x - 1)$ cm, $PS = (x + 3)$ cm dan $QR = (3x + 2)$ cm. Diberi luas trapezium itu ialah 17 cm^2, cari nilai x.



2.1.1

Membentuk persamaan kuadratik daripada punca-punca

Persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ boleh ditulis sebagai

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \cdots ①$$

Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik, maka

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$
$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \cdots ②$$

Bandingkan ① dan ②,

$$-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

Secara am, perbandingan ini dapat dirumuskan seperti berikut:

> Hasil tambah punca = $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
>
> Hasil darab punca = $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca α dan β boleh ditulis sebagai:

> x^2 – (hasil tambah punca)x + (hasil darab punca) = 0

IMBAS KEMBALI

Identiti pemfaktoran
(a) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$
$= x^2 + 2xy + y^2$
(b) $(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$
$= x^2 - 2xy + y^2$
(c) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

SUMBANG SARAN

Diberi $\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
dan $\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
(a) tunjukkan bahawa
$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$,
(b) ungkapkan hasil darab $\alpha\beta$ dalam sebutan a dan c.
Bincang bersama rakan anda.

Contoh 3

Bentukkan persamaan kuadratik dengan punca-punca 3 dan –5.

Penyelesaian

Diberi $\alpha = 3$ dan $\beta = -5$.
Hasil tambah punca, $\alpha + \beta = 3 + (-5)$
$= -2$
Hasil darab punca, $\alpha\beta = 3 \times (-5)$
$= -15$
Maka, persamaan kuadratik dengan punca-punca 3 dan –5 ialah

x^2 – (hasil tambah punca)x + (hasil darab punca) = 0
$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$
$$x^2 - (-2)x + (-15) = 0$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Kaedah Alternatif

$$(x - 3)(x + 5) = 0$$
$$x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Contoh 4

Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + x = 4$, bentukkan persamaan yang mempunyai punca-punca berikut.

(a) $\alpha + 3, \beta + 3$
(b) $2\alpha, 2\beta$
(c) α^2, β^2

Penyelesaian

$2x^2 + x - 4 = 0$ dengan $a = 2$, $b = 1$ dan $c = -4$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ dan $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{2} = -2$

(a) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}(\alpha + 3) + (\beta + 3) &= (\alpha + \beta) + 6\\ &= -\frac{1}{2} + 6\\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}(\alpha + 3)(\beta + 3) &= \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9\\ &= -2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca $\alpha + 3$ dan $\beta + 3$ ialah

$$x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{11}{2} = 0 \leftarrow$$

Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan 2

$$2x^2 - 11x + 11 = 0$$

(b) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}2\alpha + 2\beta &= 2(\alpha + \beta)\\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}(2\alpha)(2\beta) &= 4\alpha\beta\\ &= 4(-2)\\ &= -8\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca 2α dan 2β ialah

$$\begin{aligned}x^2 - (-1)x - 8 &= 0\\ x^2 + x - 8 &= 0\end{aligned}$$

(c) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-2)\\ &= \frac{1}{4} + 4\\ &= \frac{17}{4}\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= (\alpha\beta)^2\\ &= (-2)^2\\ &= 4\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca α^2 dan β^2 ialah

$$x^2 - \frac{17}{4}x + 4 = 0 \leftarrow$$

Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan 4

$$4x^2 - 17x + 16 = 0$$

Latih Diri 2.2

1. Bentukkan persamaan kuadratik yang mempunyai punca-punca berikut.

(a) 2 dan 6 (b) −1 dan 4 (c) −4 dan −7 (d) $\frac{1}{5}$ dan −5

2. Persamaan kuadratik $x^2 + (p - 5)x + 2q = 0$ mempunyai punca-punca −3 dan 6. Cari nilai p dan nilai q.

3. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $5x^2 - 10x - 9 = 0$, bentukkan persamaan kuadratik dengan punca-punca yang berikut.

(a) $\alpha + 2$ dan $\beta + 2$ (b) 5α dan 5β (c) $\alpha - 1$ dan $\beta - 1$ (d) $\frac{\alpha}{3}$ dan $\frac{\beta}{3}$

4. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + 5x = 1$, cari persamaan dengan punca-punca berikut.

(a) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (b) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right), \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ (c) α^2, β^2 (d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

5. Persamaan kuadratik $2x^2 = 6x + 3$ mempunyai punca-punca p dan q. Cari persamaan kuadratik dengan punca-punca p^2q dan pq^2.

Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik

Satu ketaksamaan dengan ungkapan kuadratik pada satu sisi dan sifar pada sisi yang satu lagi, disebut sebagai ketaksamaan kuadratik dalam satu pemboleh ubah. Misalnya, $2x^2 + 7x - 4 \leqslant 0$ dan $(x + 1)(x - 3) > 0$ ialah ketaksamaan kuadratik dalam satu pemboleh ubah, x. Untuk menyelesaikan ketaksamaan kuadratik seperti $(x + 1)(x - 3) > 0$, kita perlu mencari julat nilai x supaya ungkapan di sebelah kiri adalah lebih besar daripada sifar.

Tiga kaedah yang boleh digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan kuadratik ialah kaedah **lakaran graf**, **garis nombor** dan **jadual**.

INKUIRI 2 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik dengan kaedah lakaran graf, garis nombor dan jadual

Arahan:

1. Pertimbangkan ketaksamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$.
2. Bentukkan tiga kumpulan dan setiap kumpulan perlu memilih satu daripada tiga kaedah penyelesaian berikut.

Kaedah lakaran graf

- Selesaikan persamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) = 0$
- Lakarkan graf bagi $y = (x + 1)(x - 3)$.
- Tanda dan tentukan julat nilai x pada lakaran graf tersebut apabila $(x + 1)(x - 3) > 0$ $(y > 0)$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$ $(y < 0)$.

2.1.2 2.1.3

Kaedah garis nombor

- Selesaikan persamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) = 0$.
- Lukis garis nombor pada sehelai kertas.
- Dengan memilih nilai-nilai x yang memuaskan $x < -1$, $x > 3$ dan $-1 < x < 3$ pada garis nombor itu dan menggantikannya ke dalam $(x + 1)(x - 3)$, tentu dan sahkan julat nilai x apabila $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$.

Kaedah jadual

- Salin dan lengkapkan jadual berikut dengan tanda (+) atau tanda (–) untuk setiap faktor bagi persamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) = 0$.

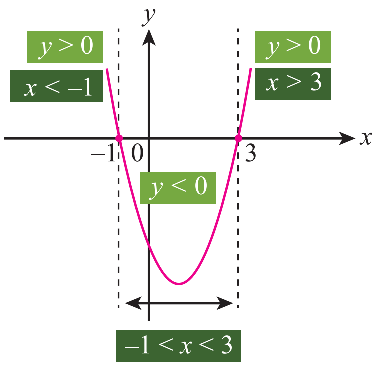
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$(x + 1)$					
$(x - 3)$					
$(x + 1)(x - 3)$					

- Daripada keputusan yang diperoleh dalam jadual itu, apakah julat nilai x apabila $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$?

3. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan kumpulan yang lain.
4. Lakukan perbincangan secara menyeluruh tentang ketiga-tiga kaedah itu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan kuadratik.

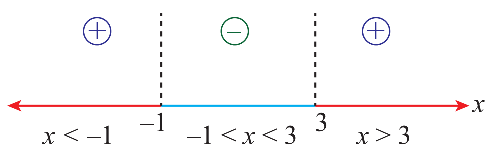
Hasil daripada Inkuiri 2, penyelesaian bagi ketaksamaan kuadratik $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$ dengan kaedah lakaran graf, garis nombor dan jadual yang diperoleh ditunjukkan seperti berikut.

Lakaran graf



Garis nombor

Titik ujian –2: $(-2 + 1)(-2 - 3) > 0$
Titik ujian 0: $(0 + 1)(0 - 3) < 0$
Titik ujian 4: $(4 + 1)(4 - 3) > 0$



Jadual

	Julat nilai x		
	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$(x + 1)$	–	+	+
$(x - 3)$	–	–	+
$(x + 1)(x - 3)$	+	–	+

Daripada ketiga-tiga hasil dapatan ini, dapat disimpulkan bahawa:

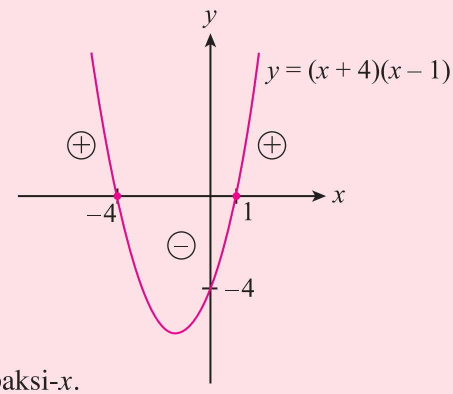
Bagi suatu persamaan kuadratik dalam bentuk $(x - a)(x - b) = 0$, dengan $a < b$,
(a) jika $(x - a)(x - b) > 0$, maka $x < a$ atau $x > b$,
(b) jika $(x - a)(x - b) < 0$, maka $a < x < b$.

Contoh 5

Cari julat nilai x bagi ketaksamaan kuadratik $(2x - 1)(x + 4) \geqslant x + 4$ menggunakan kaedah
(a) lakaran graf
(b) garis nombor
(c) jadual

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned}(2x - 1)(x + 4) &\geqslant x + 4\\ 2x^2 + 7x - 4 &\geqslant x + 4\\ 2x^2 + 6x - 8 &\geqslant 0\\ x^2 + 3x - 4 &\geqslant 0\\ (x + 4)(x - 1) &\geqslant 0\end{aligned}$$



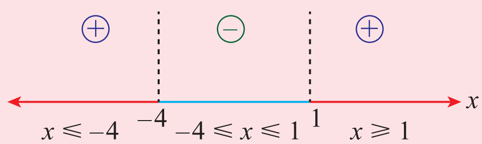
Apabila $(x + 4)(x - 1) = 0$, $x = -4$ atau $x = 1$.

Graf akan menyilang paksi-x pada titik $x = -4$ dan $x = 1$.

Oleh sebab $(x + 4)(x - 1) \geqslant 0$, maka julat nilai x ditentukan pada lengkung graf yang berada di atas paksi-x.
Maka, julat nilai x ialah $x \leqslant -4$ atau $x \geqslant 1$.

(b)

Titik ujian –5:	Titik ujian 0:	Titik ujian 2:
$(-5 + 4)(-5 - 1) \geqslant 0$	$(0 + 4)(0 - 1) \leqslant 0$	$(2 + 4)(2 - 1) \geqslant 0$



Oleh sebab $(x + 4)(x - 1) \geqslant 0$, maka julat nilai x ditentukan pada bahagian positif garis nombor.

Maka, julat nilai x ialah $x \leqslant -4$ atau $x \geqslant 1$.

(c)

	Julat nilai x		
	$x \leqslant -4$	$-4 \leqslant x \leqslant 1$	$x \geqslant 1$
$(x + 4)$	–	+	+
$(x - 1)$	–	–	+
$(x + 4)(x - 1)$	+	–	+

Oleh sebab $(x + 4)(x - 1) \geqslant 0$, maka julat nilai x ditentukan pada bahagian positif dalam jadual.

Maka, julat nilai x ialah $x \leqslant -4$ atau $x \geqslant 1$.

Latih Diri 2.3

1. Selesaikan setiap ketaksamaan kuadratik yang berikut menggunakan kaedah lakaran graf, garis nombor atau jadual.
   (a) $x^2 < 4$ (b) $(2 - x)(8 - x) < 0$ (c) $x^2 \leqslant 4x + 12$
   (d) $x(x - 2) \geqslant 3$ (e) $(x + 2)^2 < 2x + 7$ (f) $(3x + 1)(5 - x) > 13$
2. Cari julat nilai x bagi $3x^2 - 5x \geqslant 16 + x(2x + 1)$.

Latihan Intensif 2.1

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2SHb06q untuk kuiz

1. Selesaikan persamaan kuadratik $3x(x - 5) = 2x - 1$. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
2. Diberi persamaan kuadratik $2(x - 5)^2 = 4(x + 7)$,
   (a) ungkapkan persamaan tersebut dalam bentuk am, iaitu $ax^2 + bx + c = 0$.
   (b) nyatakan hasil tambah dan hasil darab punca bagi persamaan tersebut.
3. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + 6x - 7 = 0$, bentukkan persamaan dengan punca-punca yang berikut.
   (a) $\dfrac{1}{2\alpha + 1}, \dfrac{1}{2\beta + 1}$ (b) $\dfrac{5\alpha}{\beta}, \dfrac{5\beta}{\alpha}$ (c) $\alpha + 3\beta, 3\alpha + \beta$
4. Jika satu punca bagi persamaan $3x^2 + 19x + k = 0$ ialah -7, cari nilai pemalar k.
5. Diberi persamaan kuadratik $rx^2 + (r - 1)x + 2r + 3 = 0$, dengan r ialah integer bukan sifar, cari nilai r dengan keadaan
   (a) satu punca adalah negatif punca yang satu lagi,
   (b) satu punca adalah salingan punca yang satu lagi,
   (c) satu punca adalah dua kali punca yang satu lagi.
6. Satu punca bagi persamaan $x^2 - 8x + m = 0$ ialah tiga kali punca yang satu lagi, cari nilai pemalar m dan punca-puncanya.
7. Persamaan $x^2 + 2x = k(x - 1)$ mempunyai punca bukan sifar dengan beza antara punca adalah 2, cari nilai setiap punca dan nilai k.
8. Punca-punca persamaan $x^2 + px + 27 = 0$ adalah mengikut nisbah 1 : 3. Cari nilai-nilai p.
9. Diberi 3 dan $h + 1$ ialah punca-punca bagi persamaan $x^2 + (k - 1)x + 9 = 0$, cari nilai-nilai yang mungkin bagi h dan k.
10. Dua punca bagi persamaan $x^2 - 8x + c = 0$ ialah α dan $\alpha + 3d$, ungkapkan c dalam sebutan d.
11. Selesaikan setiap ketaksamaan kuadratik yang berikut.
    (a) $2x^2 \geqslant x + 1$ (b) $(x - 3)^2 \leqslant 5 - x$ (c) $(1 - x)^2 + 2x < 17$
12. Cari nilai m dan nilai n bagi setiap ketaksamaan kuadratik berikut.
    (a) $x^2 + mx < n$ yang hanya dipenuhi oleh $-3 < x < 4$.
    (b) $2x^2 + m > nx$ yang hanya dipenuhi oleh $x < -2$ atau $x > 5$.
13. Diberi $y = 2x^2 + bx + 12$ dan $y < 0$ jika $2 < x < a$, cari nilai bagi a dan b.

2.2 Jenis-jenis Punca Persamaan Kuadratik

Jenis-jenis punca persamaan kuadratik dan nilai pembezalayan

Anda telah mempelajari bahawa punca-punca bagi suatu persamaan kuadratik boleh dicari dengan menggunakan rumus $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Adakah jenis-jenis punca suatu persamaan kuadratik berkait rapat dengan nilai $b^2 - 4ac$ dalam rumus itu? Mari kita teroka.

INKUIRI 3 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka perkaitan antara jenis punca persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ dengan nilai $b^2 - 4ac$

Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik satu persatu pada petak yang memaparkan graf bagi $y = x^2 + 5x + 4$, $y = x^2 - 6x + 9$ dan $y = 9x^2 - 6x + 2$.
3. Perhatikan kedudukan graf-graf tersebut.
4. Kenal pasti nilai-nilai a, b dan c serta punca-punca bagi setiap graf tersebut apabila $y = 0$.
5. Bincang bersama-sama ahli kumpulan tentang perkaitan antara nilai $b^2 - 4ac$ dengan jenis punca yang diperoleh.
6. Bentangkan hasil dapatan kumpulan masing-masing di hadapan kelas.

bit.ly/2RS5Jff

Hasil daripada Inkuiri 3, perhatikan bahawa jenis-jenis punca persamaan kuadratik dapat ditentukan daripada nilai $b^2 - 4ac$ yang dikenali sebagai **pembezalayan** dan biasanya diwakili dengan simbol D.
Secara amnya:

1. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac > 0$, persamaan mempunyai dua punca nyata dan berbeza.
2. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac = 0$, persamaan mempunyai dua punca nyata yang sama.
3. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac < 0$, persamaan tidak mempunyai punca nyata.

Bagi persamaan kuadratik $9x^2 - 6x + 2 = 0$ yang tidak mempunyai punca, perhatikan bahawa pembezalayannya bernilai negatif. Oleh sebab $\sqrt{-36}$ bukan suatu nombor nyata, maka persamaan kuadratik ini tidak mempunyai punca nyata. Punca kuasa dua bagi suatu nombor negatif dikenali sebagai nombor khayalan dan diwakili oleh $i = \sqrt{-1}$. Maka, punca bagi persamaan kuadratik $9x^2 - 6x + 2 = 0$ boleh ditulis sebagai $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36(-1)}}{18} = \dfrac{6 \pm 6i}{18} = \dfrac{1 \pm i}{3}$.

TIP PINTAR

Apabila pembezalayan $b^2 - 4ac \geqslant 0$, persamaan mempunyai punca nyata.

Cabar Minda

Apakah jenis punca persamaan kuadratik jika pembezalayan $b^2 - 4ac \leqslant 0$?

SUMBANG SARAN

Tentukan punca-punca bagi persamaan kuadratik berikut. Berikan jawapan anda dalam sebutan nombor khayalan, i, dengan $i = \sqrt{-1}$.
(a) $x^2 + 4x + 5 = 0$
(b) $x^2 - 2x + 3 = 0$
(c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

2.2.1

Contoh 6

Tentukan jenis punca bagi setiap persamaan kuadratik berikut.
(a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
(b) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$
(c) $2x^2 - 4x + 5 = 0$

Penyelesaian

(a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ dengan $a = 1$, $b = 5$ dan $c = -6$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 5^2 - 4(1)(-6) \\ &= 49\ (> 0) \end{aligned}$$

Maka, persamaan $x^2 + 5x - 6 = 0$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza.

(b) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ dengan $a = -4$, $b = 4$ dan $c = -1$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-4)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maka, persamaan $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama.

(c) $2x^2 - 4x + 5 = 0$ dengan $a = 2$, $b = -4$ dan $c = 5$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(2)(5) \\ &= -24\ (< 0) \end{aligned}$$

Maka, persamaan $2x^2 - 4x + 5 = 0$ tidak mempunyai punca nyata.

Cabar Minda

Mengapakah nilai pembezalayan perlu dicari terlebih dahulu semasa menentukan jenis punca persamaan kuadratik?

Celik Teknologi

Semak jawapan anda dengan aplikasi *Mathpapa* yang boleh dimuat turun daripada peranti mudah alih anda.

bit.ly/2LGClgg

Latih Diri 2.4

1. Cari pembezalayan dan tentukan jenis-jenis punca bagi setiap persamaan kuadratik berikut.

(a) $x^2 + 4x + 1 = 0$	(b) $x^2 = 8(x - 2)$	(c) $5x^2 + 4x + 6 = 0$
(d) $-3x^2 + 7x + 5 = 0$	(e) $-x^2 + 10x - 25 = 0$	(f) $(2x - 1)(x + 3) = 0$

Menyelesaikan masalah melibatkan jenis-jenis punca persamaan kuadratik

Pembezalayan, D yang menentukan jenis-jenis punca bagi suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ boleh digunakan untuk:
(a) Mencari suatu nilai yang tidak diketahui dalam persamaan kuadratik.
(b) Menerbitkan suatu hubungan.

Contoh 7

(a) Persamaan kuadratik $x^2 + k + 3 = kx$, dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k.
(b) Punca-punca persamaan $(p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$, dengan p ialah pemalar adalah nyata dan berbeza. Cari julat nilai p.
(c) Diberi persamaan kuadratik $x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$, dengan m ialah pemalar, tidak mempunyai punca nyata, cari julat nilai m.

Penyelesaian

(a)
$$x^2 + k + 3 = kx$$
$$x^2 - kx + k + 3 = 0$$
Susun semula persamaan dalam bentuk am

$a = 1, b = -k$ dan $c = k + 3$

$$b^2 - 4ac = 0$$
Dua punca nyata yang sama
$$(-k)^2 - 4(1)(k + 3) = 0$$
$$k^2 - 4k - 12 = 0$$
$$(k + 2)(k - 6) = 0$$
$k = -2$ atau $k = 6$

(b)
$$(p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$$
$$(p + 2)x^2 - 2px + p - 3 = 0$$
Susun semula persamaan dalam bentuk am

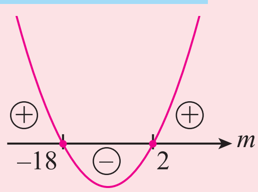
$a = p + 2, b = -2p$ dan $c = p - 3$

$$b^2 - 4ac > 0$$
Dua punca nyata dan berbeza
$$(-2p)^2 - 4(p + 2)(p - 3) > 0$$
$$4p^2 - 4(p^2 - p - 6) > 0$$
$$4p + 24 > 0$$
$$p > -6$$

(c)
$$x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$$
$$x^2 + 4x + 13 = 2m - mx$$
$$x^2 + 4x + mx + 13 - 2m = 0$$
$$x^2 + (4 + m)x + 13 - 2m = 0$$
Susun semula persamaan dalam bentuk am

$a = 1, b = 4 + m$ dan $c = 13 - 2m$

$$b^2 - 4ac < 0$$
Tidak mempunyai punca nyata
$$(4 + m)^2 - 4(1)(13 - 2m) < 0$$
$$16 + 8m + m^2 - 52 + 8m < 0$$
$$m^2 + 16m - 36 < 0$$
$$(m + 18)(m - 2) < 0$$



Maka, julat nilai m ialah $-18 < m < 2$.

Contoh 8

Diberi persamaan $x^2 - 4ax + 5b = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama, ungkapkan a dalam sebutan b.

Penyelesaian

$x^2 - 4ax + 5b = 0$ dengan $a = 1, b = -4a$ dan $c = 5b$.

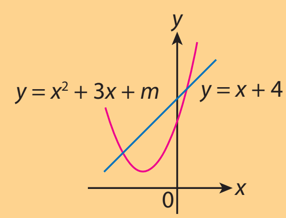
Oleh sebab persamaan mempunyai dua punca nyata yang sama,
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4a)^2 - 4(1)(5b) = 0$$
$$16a^2 - 20b = 0$$
$$16a^2 = 20b$$
$$a^2 = \frac{5}{4}b$$
$$a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5b}$$

SUMBANG SARAN

Dengan menganggap $b^2 - 4ac \geqslant 0$, tunjukkan bahawa penyelesaian bagi persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah salingan bagi penyelesaian persamaan $cx^2 + bx + a = 0$.

POKET MATEMATIK

Pertimbangkan garis $y = x + 4$ yang menyilang lengkung $y = x^2 + 3x + m$ seperti dalam rajah di bawah.



Untuk mencari julat nilai m, selesaikan dua persamaan itu secara serentak.
$$x^2 + 3x + m = x + 4$$
$$x^2 + 2x + m - 4 = 0$$
Persamaan kuadratik ini mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Jadi,
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$2^2 - 4(1)(m - 4) > 0$$
$$4 - 4m + 16 > 0$$
$$4m < 20$$
$$m < 5$$
Maka, julat nilai m ialah $m < 5$.

Lakukan perbincangan bersama rakan anda dan cari nilai-nilai m atau julat nilai m untuk kes-kes berikut:
- Garis $y = mx - 5$ menyentuh satu titik pada lengkung $2y = x^2 - 1$.
- Garis $y = mx + 4$ menyilang lengkung $5x^2 - xy = 2$ pada dua titik.
- Garis $y = 2x + 3$ tidak menyilang lengkung $x^2 + xy = m$.

Latih Diri 2.5

1. Cari nilai-nilai atau julat nilai p dengan keadaan persamaan
(a) $9x^2 + p + 1 = 4px$ mempunyai dua punca yang sama,
(b) $x^2 + (2x + 3)x = p$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza,
(c) $x^2 + 2px + (p - 1)(p - 3) = 0$ tidak mempunyai punca nyata.

2. Cari julat nilai k jika persamaan $x^2 + k = kx - 3$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Nyatakan nilai-nilai k jika persamaan itu mempunyai dua punca nyata yang sama.

3. Persamaan kuadratik $x^2 + hx + k = 0$ mempunyai punca-punca -2 dan 6, cari
(a) nilai h dan nilai k,
(b) julat nilai c dengan keadaan persamaan $x^2 + hx + k = c$ tidak mempunyai punca nyata.

4. Persamaan $hx^2 + 3hx + h + k = 0$, dengan $h \neq 0$, mempunyai dua punca nyata yang sama. Ungkapkan k dalam sebutan h.

5. Diberi bahawa persamaan kuadratik $ax^2 - 5bx + 4a = 0$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar mempunyai dua punca nyata yang sama, cari nisbah $a : b$.

Latihan Intensif 2.2

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2Z8bFQG untuk kuiz

1. Tentukan jenis punca bagi persamaan kuadratik berikut.
(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (b) $(x - 2)^2 = 3$ (c) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. Persamaan kuadratik berikut mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai k.
(a) $x^2 + kx = 2x - 9$ (b) $kx^2 + (2k + 1)x + k - 1 = 0$

3. Persamaan kuadratik berikut mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Cari julat nilai r.
(a) $x(x + 1) = rx - 4$ (b) $x^2 + x = 2rx - r^2$

4. Cari julat nilai p jika persamaan berikut tidak mempunyai punca nyata.
(a) $(1 - p)x^2 + 5 = 2x$ (b) $4px^2 + (4p + 1)x + p - 1 = 0$

5. Persamaan kuadratik $kx^2 - 10x + 6k = 5$ dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama.
(a) Cari nilai-nilai k.
(b) Seterusnya, cari punca bagi persamaan tersebut dengan menggunakan nilai terkecil k yang diperoleh di (a).

6. Persamaan kuadratik $x(x - 4) + 2n = m$ dengan m dan n ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Ungkapkan m dalam sebutan n.

7. Persamaan kuadratik $x^2 + bx + c = 0$ dengan b dan c ialah integer positif, mempunyai pembezalayan 16 dan $b - c = -4$. Cari
(a) nilai-nilai yang mungkin bagi b dan c,
(b) punca-punca yang sepadan bagi persamaan tersebut.

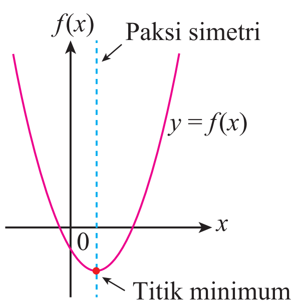
8. Persamaan kuadratik $2x^2 - 5x + c = 0$ dengan c ialah integer positif, tidak mempunyai punca nyata.
(a) Cari dua nilai yang mungkin, c_1 dan c_2 bagi c.
(b) Berdasarkan nilai c_1 dan c_2 di (a), adakah persamaan $2x^2 - 5x + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0$ mempunyai dua punca nyata? Terangkan.

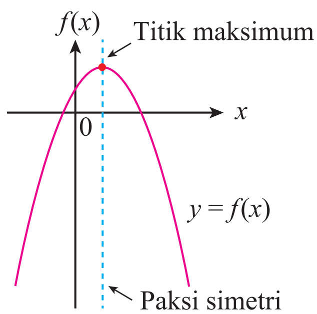
2.3 Fungsi Kuadratik

Sebiji bola dilontarkan ke dalam jaring. Apakah yang dapat anda perhatikan tentang laluan bola itu? Jika anda perhatikan laluan bola itu, didapati laluannya mengikut bentuk parabola. Laluan atau lengkung seperti itu merupakan bentuk graf bagi suatu fungsi kuadratik. Apakah contoh-contoh lain yang melibatkan bentuk parabola?

Menganalisis kesan perubahan *a*, *b* dan *c* terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bentuk am suatu fungsi kuadratik ialah suatu fungsi dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan keadaan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$. Bentuk graf suatu fungsi kuadratik ialah parabola yang bersimetri pada paksi yang melalui titik minimum atau titik maksimum.





POKET MATEMATIK

Kuasa tertinggi pemboleh ubah bagi fungsi kuadratik adalah sama dengan persamaan kuadratik, iaitu 2.

Apakah yang akan berlaku kepada bentuk dan kedudukan graf fungsi kuadratik sekiranya nilai a, b dan c berubah? Mari kita teroka.

INKUIRI 4 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka kesan perubahan nilai *a*, *b* dan *c* terhadap bentuk dan kedudukan graf fungsi kuadratik

Arahan:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a = 1$, $b = 2$ dan $c = 3$.
3. Bersama-sama ahli kumpulan, buat analisis tentang perubahan pada bentuk dan kedudukan graf fungsi berdasarkan arahan berikut:
   (a) Seret gelongsor *a* ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor *b* dan gelongsor *c*.
   (b) Seret gelongsor *b* ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor *a* dan gelongsor *c*.
   (c) Seret gelongsor *c* ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor *a* dan gelongsor *b*.
4. Buat satu generalisasi tentang kesan perubahan nilai *a*, *b* dan *c* terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = ax^2 + bx + c$.
5. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dan lakukan perbincangan bersama dengan kumpulan yang lain.

ggbm.at/vagdtjdp

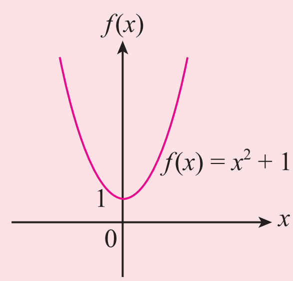
2.3.1

Daripada Inkuiri 4, hasil dapatan berikut diperoleh.

	Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$
Hanya nilai *a* berubah	• Perubahan nilai a memberi kesan kepada bentuk dan kelebaran graf namun pintasan-y tetap sama. • Apabila $a > 0$, graf berbentuk $\cup$ yang melalui titik minimum dan apabila $a < 0$, graf berbentuk $\cap$ yang melalui titik maksimum. • Untuk graf $a > 0$, misalnya $a = 1$, apabila nilai a semakin besar daripada 1, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin kecil daripada 1 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Untuk graf $a < 0$, misalnya $a = -1$, apabila nilai a semakin kecil daripada -1, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin besar daripada -1 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah.
Hanya nilai *b* berubah	• Perubahan nilai b hanya memberi kesan kepada kedudukan verteks terhadap paksi-y namun bentuk graf dan pintasan-y tidak berubah. • Apabila $b = 0$, verteks berada pada paksi-y. • Untuk graf $a > 0$, apabila $b > 0$, verteks berada di sebelah kiri paksi-y dan apabila $b < 0$, verteks berada di sebelah kanan paksi-y. • Untuk graf $a < 0$, apabila $b > 0$, verteks berada di sebelah kanan paksi-y dan apabila $b < 0$, verteks berada di sebelah kiri paksi-y.
Hanya nilai *c* berubah	• Perubahan nilai c hanya memberi kesan kepada kedudukan graf secara menegak sama ada ke atas atau ke bawah. • Bentuk graf tidak berubah.

Contoh 9

Rajah menunjukkan lakaran graf bagi $f(x) = x^2 + 1$ dengan $a = 1$, $b = 0$ dan $c = 1$. Buat analisis dan lakukan generalisasi pada bentuk dan kedudukan graf itu apabila nilai-nilai berikut berubah. Seterusnya, lakarkan graf.



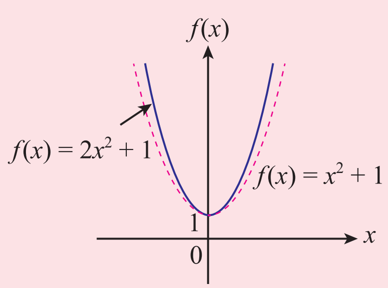
(a) Nilai a menjadi

(i) 2, (ii) $\frac{1}{2}$.

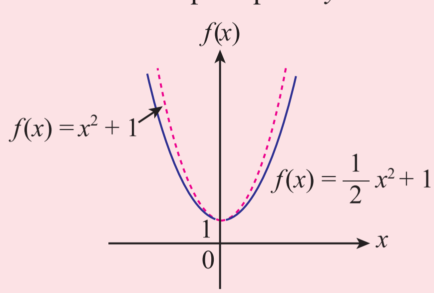
(b) Nilai c menjadi 3.

Penyelesaian

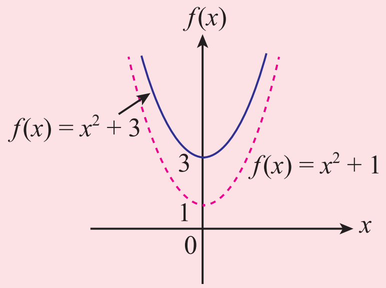
(a) (i) Apabila a berubah daripada 1 ke 2, kelebaran graf semakin berkurang. Pintasan-y tidak berubah dan verteks berada pada paksi-y.



(ii) Apabila a berubah daripada 1 ke $\frac{1}{2}$, kelebaran graf semakin bertambah. Pintasan-y tidak berubah dan verteks berada pada paksi-y.

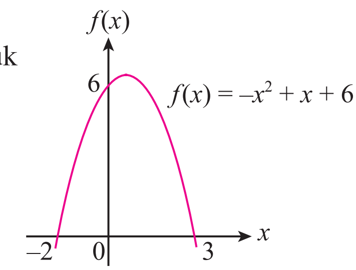


(b) Apabila c berubah daripada 1 ke 3, bentuk graf tidak berubah. Hanya kedudukannya yang berubah, iaitu graf bergerak 2 unit ke atas.



Latih Diri 2.6

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = -x^2 + x + 6$, dengan $a = -1$, $b = 1$ dan $c = 6$. Lakarkan graf $f(x)$ yang terbentuk apabila nilai berikut berubah.



(a) Nilai a berubah kepada

(i) -3 (ii) $-\frac{1}{4}$,

(b) nilai b berubah kepada -1,

(c) nilai c berubah kepada -2.

Buat generalisasi daripada perubahan bentuk dan kedudukan graf yang diperoleh.

Menghubungkaitkan kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca

Anda telah mengetahui bahawa pembezalayan $b^2 - 4ac$ bagi suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ boleh menentukan jenis punca. Mari kita lihat pula jenis punca persamaan kuadratik yang dapat menentukan kedudukan graf suatu fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ terhadap paksi-x.

INKUIRI 5 **Berkumpulan**

Tujuan: Meneroka hubungan antara kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca

Arahan:

1. Setiap kumpulan perlu memilih satu kes sahaja daripada dua kes yang berikut.

Kes 1
(a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
(b) $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$
(c) $f(x) = x^2 - 6x + 12$

Kes 2
(a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
(b) $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$
(c) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

2. Dengan menggunakan perisian geometri dinamik, bina graf setiap fungsi kuadratik bagi kes yang dipilih.

3. Perhatikan bentuk graf yang diperoleh serta punca-punca yang terhasil.

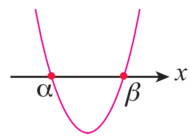
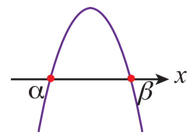
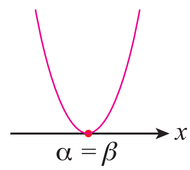
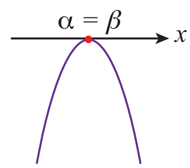
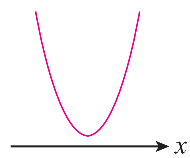
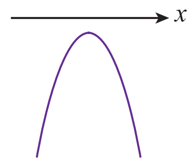
4. Nyatakan perkaitan antara nilai $b^2 - 4ac$, jenis punca dan bilangan titik persilangan pada paksi-x.

5. Daripada perkaitan tersebut, nyatakan kedudukan graf fungsi kuadratik yang diperoleh.

6. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan kumpulan yang berlainan kes dan buat kesimpulan menyeluruh tentang perbandingan yang dilakukan.

2.3.1 2.3.2

Hasil daripada Inkuiri 5, hubungan antara kedudukan graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ pada paksi-x dan jenis puncanya dapat dirumuskan seperti dalam jadual di bawah.

Pembezalayan, $b^2 - 4ac$	**Jenis punca dan kedudukan graf**	**Kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$**	
		$a > 0$	**$a < 0$**
$b^2 - 4ac > 0$	• Dua punca nyata dan berbeza • Graf menyilang paksi-x pada dua titik yang berbeza.		
$b^2 - 4ac = 0$	• Dua punca nyata yang sama • Graf menyentuh paksi-x pada satu titik sahaja.		
$b^2 - 4ac < 0$	• Tiada punca nyata • Graf tidak menyilang pada mana-mana titik pada paksi-x.		

Contoh 10

Tentukan jenis punca bagi setiap fungsi kuadratik berikut apabila $f(x) = 0$. Kemudian, lakarkan graf dan buat satu generalisasi tentang kedudukan graf itu pada paksi-x.

(a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$ (b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Penyelesaian

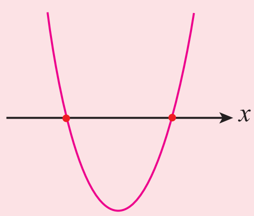
(a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$

$a = 2, b = 1, c = -5$

$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-5)$

$= 41\ (> 0)$

Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata dan berbeza.
Oleh sebab $a > 0$, maka graf $f(x)$ ialah satu parabola yang melalui titik minimum dan menyilang paksi-x pada dua titik.



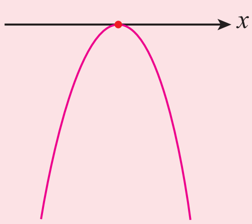
(b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

$a = -1, b = 2, c = -1$

$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-1)$

$= 0$

Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata yang sama.
Oleh sebab $a < 0$, maka graf $f(x)$ ialah satu parabola yang melalui titik maksimum dan menyentuh paksi-x pada satu titik.



Contoh 11

(a) Cari nilai-nilai m, dengan keadaan paksi-x ialah tangen kepada graf fungsi kuadratik $f(x) = (m + 1)x^2 + 4(m - 2)x + 2m$.

(b) Cari julat nilai k jika graf fungsi kuadratik $f(x) = 2x^2 + 5x + 3 - k$ tiada pintasan-x.

(c) Cari julat nilai p jika graf fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + px + p + 3$ mempunyai dua pintasan-x.

Penyelesaian

(a) Graf fungsi kuadratik $f(x) = (m + 1)x^2 + 4(m - 2)x + 2m$ dengan keadaan paksi-x ialah tangen bermaksud fungsi tersebut mempunyai dua punca nyata yang sama.

Untuk dua punca nyata yang sama:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (4m - 8)^2 - 4(m + 1)(2m) &= 0 \\ 16m^2 - 64m + 64 - 8m^2 - 8m &= 0 \\ 8m^2 - 72m + 64 &= 0 \\ m^2 - 9m + 8 &= 0 \\ (m - 1)(m - 8) &= 0 \\ m &= 1 \text{ atau } m = 8 \end{aligned}$$

(b) Graf fungsi kuadratik $f(x) = 2x^2 + 5x + 3 - k$ tiada pintasan-x bermaksud fungsi tersebut tidak mempunyai punca nyata.

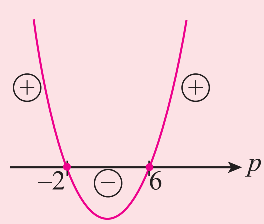
Untuk tiada punca nyata:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \\ 5^2 - 4(2)(3 - k) &< 0 \\ 25 - 24 + 8k &< 0 \\ 1 + 8k &< 0 \\ 8k &< -1 \\ k &< -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(c) Graf fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + px + p + 3$ mempunyai dua pintasan-x bermaksud fungsi tersebut mempunyai dua punca nyata yang berbeza.

Untuk dua punca nyata yang berbeza:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &> 0 \\ p^2 - 4(1)(p + 3) &> 0 \\ p^2 - 4p - 12 &> 0 \\ (p + 2)(p - 6) &> 0 \\ p &< -2 \quad \text{atau} \quad p > 6 \end{aligned}$$



SUMBANG SARAN

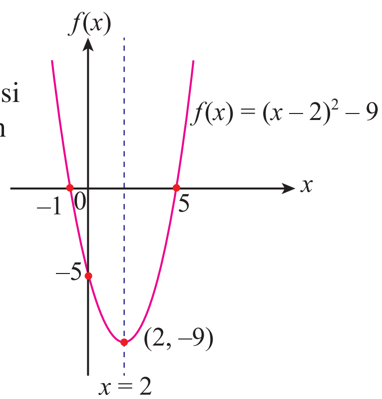
Apakah syarat untuk suatu fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ menjadi sentiasa positif atau sentiasa negatif untuk semua nilai nyata x? Bincangkan.

Latih Diri 2.7

1. Tentukan jenis punca bagi setiap fungsi kuadratik berikut. Lakarkan graf dan buat generalisasi tentang kedudukan graf pada paksi-x.
   (a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$ (b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ (c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$
2. Cari nilai-nilai h yang mungkin jika graf bagi fungsi kuadratik berikut menyentuh paksi-x pada satu titik sahaja.
   (a) $f(x) = x^2 - 2hx + 2 + h$ (b) $f(x) = x^2 - (h + 3)x + 3h + 1$
3. Cari julat nilai q jika graf bagi fungsi kuadratik berikut menyilang paksi-x pada dua titik.
   (a) $f(x) = 5x^2 - (qx + 4)x - 2$ (b) $f(x) = (q + 2)x^2 + q(1 - 2x) - 5$
4. Cari julat nilai r jika graf bagi fungsi kuadratik berikut tidak menyilang paksi-x.
   (a) $f(x) = rx^2 + 4x - 6$ (b) $f(x) = rx^2 + (2r + 4)x + r + 7$

Membuat perkaitan antara bentuk verteks fungsi kuadratik, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan bentuk fungsi kuadratik yang lain

Rajah di sebelah menunjukkan lakaran graf bagi fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, $f(x) = (x - 2)^2 - 9$. Oleh sebab $a > 0$, graf bagi fungsi kuadratik berbentuk ⋃. Perhatikan bahawa graf fungsi kuadratik ini mempunyai verteks pada titik minimum $(2, -9)$ dan persamaan paksi simetri, $x = 2$.



Bentuk verteks ialah suatu fungsi kuadratik dalam bentuk $f(x) = a(x - h)^2 + k$, dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar. Verteksnya ialah (h, k) dan bersimetri pada garis $x = h$.

Apabila $a > 0$, verteks (h, k) ialah titik minimum dan k ialah nilai minimum bagi $f(x)$. Apabila $a < 0$, verteks (h, k) ialah titik maksimum dan k ialah nilai maksimum bagi $f(x)$.

Selain bentuk verteks, fungsi kuadratik boleh ditulis dalam bentuk seperti berikut:

Bentuk fungsi kuadratik

- **Bentuk am**, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan keadaan a, b dan c ialah pemalar yang mempunyai verteks pada titik $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ dan bersimetri pada garis $x = -\frac{b}{2a}$.

- **Bentuk pintasan**, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, dengan keadaan a, p dan q ialah pemalar. p dan q ialah punca-punca atau pintasan-x bagi $f(x)$, verteksnya pada titik $\left(\frac{p + q}{2}, f\left(\frac{p + q}{2}\right)\right)$ dan bersimetri pada garis $x = \frac{p + q}{2}$.

Apakah perkaitan yang wujud antara bentuk verteks fungsi kuadratik dengan bentuk am dan bentuk pintasan? Mari kita teroka.

2.3.2 2.3.3

INKUIRI 6 **Berkumpulan**

Tujuan: Meneroka perkaitan antara bentuk verteks suatu fungsi kuadratik dengan bentuk am dan bentuk pintasan

Arahan:

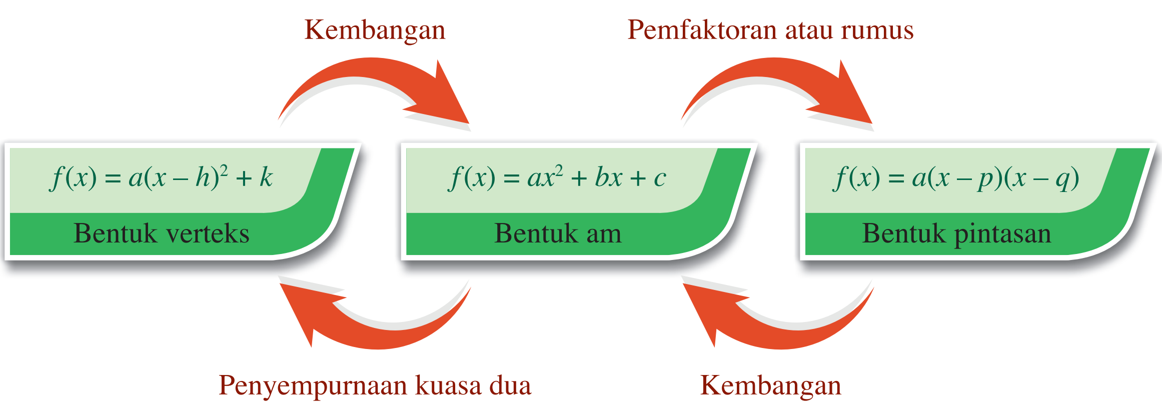
1. Pertimbangkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, $f(x) = (x - 4)^2 - 4$.
2. Dalam kumpulan masing-masing, bincang dan ungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks itu kepada bentuk am dan bentuk pintasan.
3. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

Bentuk fungsi kuadratik	Fungsi kuadratik	Pintasan-x	Pintasan-y	Verteks	Garis simetri
Bentuk verteks	$f(x) = (x - 4)^2 - 4$				
Bentuk am					
Bentuk pintasan					

4. Lakarkan graf bagi setiap bentuk fungsi kuadratik itu. Semak lakaran graf anda dengan menggunakan perisian geometri dinamik.
5. Bandingkan graf yang dibina bagi fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, bentuk am dan bentuk pintasan.
6. Lakukan sumbang saran dalam kumpulan dan dapatkan satu kesimpulan tentang perkaitan yang wujud antara fungsi kuadratik dalam bentuk verteks dengan bentuk am dan bentuk pintasan.

Hasil daripada Inkuiri 6, didapati bahawa fungsi kuadratik $f(x) = (x - 4)^2 - 4$ dalam bentuk verteks, bentuk am dan bentuk pintasan menghasilkan graf yang sama apabila dilakar.

Untuk mengungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks kepada bentuk am dan bentuk pintasan atau sebaliknya, kaedah berikut boleh digunakan:



Contoh 12

Ungkapkan fungsi kuadratik, $f(x) = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ dalam bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, dengan keadaan a, p dan q ialah pemalar dan $p < q$. Seterusnya, nyatakan nilai-nilai a, p dan q.

Penyelesaian

Tukarkan bentuk verteks fungsi kuadratik kepada bentuk am terlebih dahulu sebelum melakukan pemfaktoran.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}\\ &= 2\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) - \frac{1}{8}\\ &= 2x^2 + 9x + 10 \leftarrow \text{Bentuk am}\\ &= (2x + 5)(x + 2)\\ &= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2) \leftarrow \text{Bentuk pintasan}\end{aligned}$$

Oleh itu, fungsi kuadratik dalam bentuk pintasan bagi $f(x) = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ boleh diungkapkan sebagai $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2)$, dengan $a = 2$, $p = -\frac{5}{2}$ dan $q = -2$.

Contoh 13

Ungkapkan $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ sebagai $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar. Seterusnya, tentukan nilai-nilai a, h dan k.

Penyelesaian

$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

Pastikan pekali bagi x^2 ialah 1 sebelum melengkapkan kuasa dua sempurna.

$$\begin{aligned}f(x) &= -3x^2 + 2x + 1\\ &= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \leftarrow \text{Faktorkan } -3 \text{ daripada } -3x^2 + 2x + 1\\ &= -3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] \leftarrow \text{Tambah dan tolak } \left(\frac{\text{pekali } x}{2}\right)^2\\ &= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]\\ &= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right]\\ &= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Maka, $a = -3$, $h = \frac{1}{3}$ dan $k = \frac{4}{3}$.

Cabar Minda

Bukan semua bentuk verteks atau bentuk am boleh diungkapkan dalam bentuk pintasan, hanya graf yang mempunyai pintasan-*x* sahaja yang boleh diungkapkan. Adakah anda setuju dengan pernyataan tersebut? Terangkan.

Kaedah Alternatif

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}\\ &= 2\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{4^2}\right]\end{aligned}$$

Guna $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 2\left(x + \frac{10}{4}\right)\left(x + \frac{8}{4}\right)\\ &= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2)\end{aligned}$$

SUMBANG SARAN

Dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua, tunjukkan bahawa persamaan paksi simetri bagi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ialah $x = -\frac{b}{2a}$.

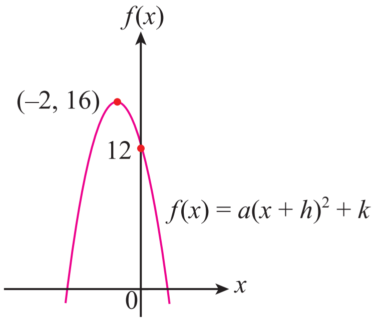
Latih Diri 2.8

1. Diberi $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8 = a(x - p)(x - q)$ untuk semua nilai x, cari nilai pemalar a, p dan q dengan $p < q$.

2. Ungkapkan setiap bentuk verteks berikut kepada bentuk am dan bentuk pintasan.
(a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ (b) $f(x) = 9 - (2x - 1)^2$ (c) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 18$

3. Cari verteks bagi fungsi $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 5$ dan tukarkannya kepada bentuk am.

4. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi kuadratik $f(x) = a(x + h)^2 + k$, dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar. Diberi $(-2, 16)$ ialah titik maksimum graf itu.
(a) Nyatakan nilai-nilai a, h dan k.
(b) Seterusnya, ungkapkan fungsi itu dalam bentuk am, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$.



5. Ungkapkan setiap yang berikut dalam bentuk verteks, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar.
(a) $f(x) = x^2 - x - 6$ (b) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ (c) $f(x) = -2x^2 - x + 6$
(d) $f(x) = 3x^2 - 2x - 9$ (e) $f(x) = (x + 2)(6 - x)$ (f) $f(x) = 2(x + 4)(x - 2)$

Menganalisis kesan perubahan *a*, *h* dan *k* terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Fungsi kuadratik dalam bentuk verteks, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan a, h dan k ialah pemalar mempunyai verteks pada (h, k) dan bersimetri pada garis $x = h$. Apakah yang akan berlaku kepada bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x)$ apabila nilai a, h dan k berubah?

INKUIRI 7 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka kesan perubahan a, h dan k terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Arahan:
1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan $a = 2$, $h = 3$ dan $k = 1$.
3. Bersama-sama ahli kumpulan, buat analisis dan nyatakan pemerhatian pada bentuk dan kedudukan graf fungsi berdasarkan setiap arahan berikut:
   (a) Seret gelongsor a ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor h dan gelongsor k.
   (b) Seret gelongsor h ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor a dan gelongsor k.
   (c) Seret gelongsor k ke kiri dan ke kanan tanpa mengubah gelongsor a dan gelongsor h.
4. Apakah yang berlaku pada paksi simetri, nilai minimum atau nilai maksimum graf fungsi itu apabila nilai a, nilai h atau nilai k berubah?
5. Buat satu generalisasi tentang kesan perubahan a, h dan k terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

ggbm.at/ubtwphte

2.3.3 2.3.4

Hasil daripada Inkuiri 7, didapati bahawa:

	Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$
Hanya nilai *a* berubah	• Perubahan nilai a memberi kesan kepada bentuk dan kelebaran graf. • Apabila $a > 0$, graf berbentuk ⋃ yang melalui titik minimum dan apabila $a < 0$, graf berbentuk ⋂ yang melalui titik maksimum. • Untuk graf $a > 0$, misalnya $a = 2$, apabila nilai a semakin besar daripada 2, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin kecil daripada 2 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Untuk graf $a < 0$, misalnya $a = -2$, apabila nilai a semakin kecil daripada -2, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin besar daripada -2 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Paksi simetri dan nilai minimum atau maksimum tidak berubah.
Hanya nilai *h* berubah	• Perubahan nilai h hanya menunjukkan pergerakan mengufuk graf. • Apabila nilai h bertambah, graf akan bergerak ke kanan manakala apabila nilai h berkurang, graf akan bergerak ke kiri. • Kedudukan paksi simetri berubah tetapi nilai minimum atau nilai maksimum tidak berubah.
Hanya nilai *k* berubah	• Perubahan nilai k hanya menunjukkan pergerakan menegak graf. • Apabila nilai k bertambah, graf akan bergerak ke atas manakala apabila nilai k berkurang, graf akan bergerak ke bawah. • Nilai minimum atau maksimum berubah tetapi paksi simetri tidak berubah.

Contoh 14

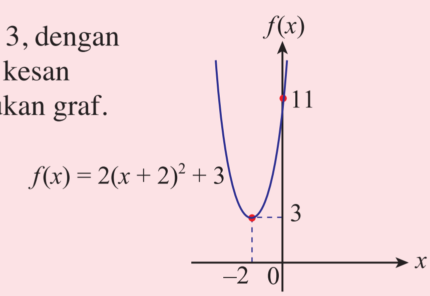
Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = 2(x + 2)^2 + 3$, dengan keadaan $a = 2$, $h = -2$ dan $k = 3$. Buat generalisasi tentang kesan perubahan setiap nilai berikut terhadap bentuk dan kedudukan graf.

(a) Nilai a berubah kepada

(i) 6, (ii) $\frac{1}{2}$.

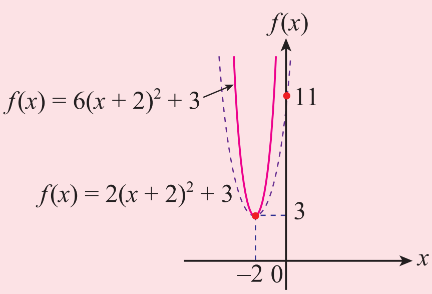
(b) Nilai h berubah kepada -6.

(c) Nilai k berubah kepada 8.

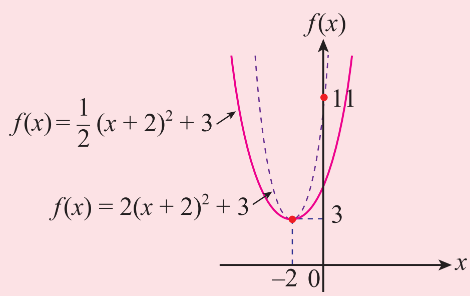


Penyelesaian

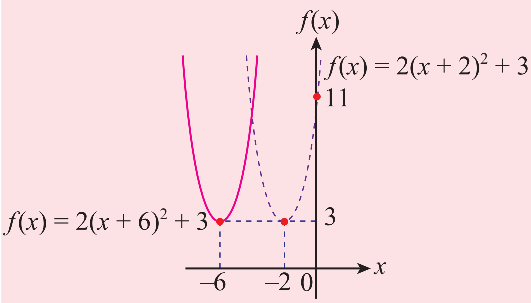
(a) (i) Apabila a berubah dari 2 ke 6, kelebaran graf berkurang. Paksi simetri dan nilai minimum graf tidak berubah.



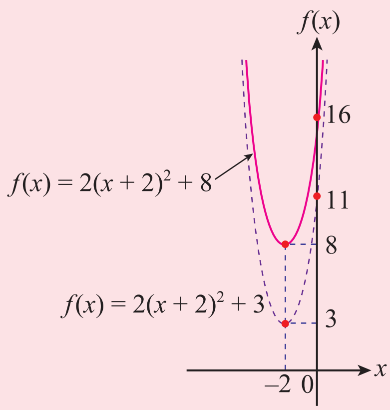
(ii) Apabila a berubah dari 2 ke $\frac{1}{2}$, kelebaran graf bertambah. Paksi simetri dan nilai minimum graf tidak berubah.



(b) Apabila h berubah dari –2 ke –6, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara mengufuk 4 unit ke kiri. Persamaan paksi simetrinya menjadi $x = -6$ dan nilai minimumnya tidak berubah, iaitu 3.



(c) Apabila k berubah dari 3 ke 8, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara menegak 5 unit ke atas. Nilai minimumnya menjadi 8 dan persamaan paksi simetrinya masih sama, iaitu $x = -2$.



Latih Diri 2.9

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$ dengan $a = -3$, $h = 2$ dan $k = 4$.

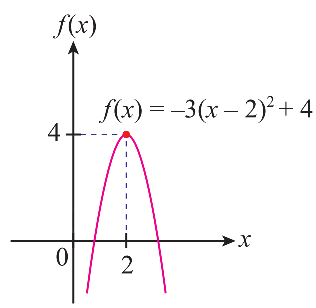
(a) Tentukan koordinat bagi titik maksimum dan persamaan paksi simetri.

(b) Buat generalisasi terhadap bentuk dan kedudukan graf apabila nilai-nilai berikut berubah. Seterusnya, lakarkan graf.

(i) Nilai a berubah kepada –10.

(ii) Nilai h berubah kepada 5.

(iii) Nilai k berubah kepada –2.

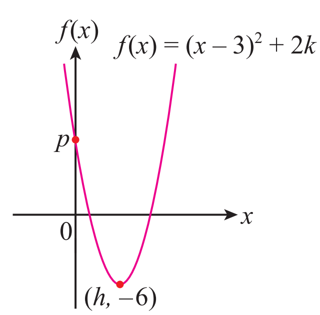


2. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $f(x) = (x - 3)^2 + 2k$, dengan keadaan k ialah pemalar. Diberi $(h, -6)$ ialah titik minimum graf itu.

(a) Nyatakan nilai-nilai h, k dan p.

(b) Jika graf itu bergerak 2 unit ke kanan, tentukan persamaan paksi simetri bagi lengkung itu.

(c) Jika graf itu bergerak 5 unit ke atas, tentukan nilai minimumnya.



3. Bandingkan graf bagi setiap fungsi kuadratik berikut kepada graf $f(x) = x^2$ dengan koordinat verteks ialah $(0, 0)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)^2$ (b) $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$ (c) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 4$

2.3.4

Melakar graf fungsi kuadratik

Graf fungsi kuadratik dalam pelbagai bentuk boleh dilakar mengikut langkah-langkah berikut:

Kenal pasti nilai a untuk menentukan bentuk graf fungsi kuadratik. → Cari nilai pembezalayan, $b^2 - 4ac$ untuk menentukan kedudukan graf. → Tentukan verteks. → Tentukan titik persilangan pada paksi-x dengan menyelesaikan persamaan fungsi kuadratik $f(x) = 0$. → Cari nilai $f(0)$ untuk menentukan pintasan-y. → Plotkan titik-titik yang diperoleh pada satah Cartes dan lukis satu parabola licin bersimetri pada garis mencancang yang melalui verteks graf.

Contoh 15

Lakarkan graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = -x^2 + 4x + 12$.

Penyelesaian

$a < 0$, maka $f(x)$ mempunyai titik maksimum.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-1)(12) \\ &= 16 + 48 \\ &= 64\ (> 0) \end{aligned}$$

Lengkung menyilang paksi-x pada dua titik yang berbeza.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 12 \\ &= -(x^2 - 4x - 12) \\ &= -\left[x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 12\right] \\ &= -(x-2)^2 + 16 \end{aligned}$$

Titik maksimum ialah (2, 16) dan persamaan paksi simetri, $x = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 4x + 12 &= 0 \\ (-x + 6)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$-x + 6 = 0$ atau $x + 2 = 0$

$x = 6$ $x = -2$

Persilangan pada paksi-x ialah di $x = -2$ dan $x = 6$.

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0)^2 + 4(0) + 12 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Graf menyilang paksi-y pada (0, 12).

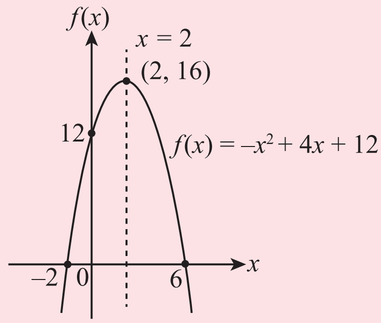
SUMBANG SARAN

Bagaimanakah cara untuk melakar graf fungsi kuadratik dalam Contoh 15 bagi domain $-3 \leqslant x \leqslant 7$?

SUMBANG SARAN

Tanpa mengungkapkan kepada bentuk verteks, bagaimanakah cara mencari verteks bagi fungsi kuadratik dalam bentuk am, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$? Bincangkan.

Lengkung dilakar seperti rajah di sebelah.



Latih Diri 2.10

1. Lakarkan graf bagi setiap fungsi kuadratik yang berikut.
(a) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$
(b) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 2$
(c) $f(x) = 9 - (x - 2)^2$
(d) $f(x) = -2(x - 1)(x - 3)$
(e) $f(x) = -(x + 3)(x + 5)$
(f) $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$
(g) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
(h) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$
(i) $f(x) = -x^2 + 4x + 12$

Menyelesaikan masalah fungsi kuadratik

Pengetahuan tentang fungsi kuadratik adalah amat penting dan banyak digunakan dalam kehidupan seharian. Graf fungsi kuadratik yang berbentuk parabola boleh membantu kita menyelesaikan banyak masalah misalnya, untuk meramal untung dan rugi dalam perniagaan, memplot gerakan melengkung suatu objek dan menentukan nilai minimum atau nilai maksimum.

Contoh 16 APLIKASI MATEMATIK

Suresh dipilih untuk mewakili sekolah dalam pertandingan merejam lembing peringkat daerah. Suresh merejam batang lembing pada jarak 3 meter daripada permukaan tanah. Tinggi lembing yang direjam diberi oleh fungsi $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$, dengan keadaan h ialah ketinggian lembing, dalam meter, dan t ialah masa, dalam saat.
(a) Cari tinggi maksimum, dalam meter, lembing yang direjam oleh Suresh.
(b) Hitung masa, dalam saat, apabila lembing itu menyentuh permukaan tanah.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

Fungsi bagi tinggi rejaman lembing ialah $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$, dengan h ialah ketinggian lembing, dalam meter, dan t ialah masa selepas lembing direjam, dalam saat.

2. Merancang strategi

- Ungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks dan tentukan nilai maksimum.
- Selesaikan persamaan $h(t) = 0$ untuk mencari pintasan pada paksi-t, iaitu masa untuk lembing menyentuh permukaan tanah.

2.3.5 2.3.6

3. Melaksanakan strategi

(a) $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$

$$= -5\left(t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{3}{5}\right) \leftarrow \text{Jadikan pekali } t^2 \text{ sebagai 1}$$

$$= -5\left(t^2 - \frac{14}{5}t + \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\right) \leftarrow \text{Tambah dan tolak } \left(\frac{\text{pekali } t}{2}\right)^2$$

$$= -5\left[\left(t - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{64}{25}\right]$$

$$= -5\left(t - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{64}{5} \leftarrow \text{Verteks ialah } \left(\frac{7}{5}, \frac{64}{5}\right)$$

Oleh sebab $a < 0$, maka nilai maksimum bagi $h(t)$ ialah $\frac{64}{5}$ apabila $t = \frac{7}{5}$.

Oleh itu, tinggi maksimum yang dicapai oleh lembing ialah $\frac{64}{5}$ meter = 12.8 meter.

(b)
$$h(t) = 0$$
$$-5t + 14t + 3 = 0$$
$$5t^2 - 14t - 3 = 0$$
$$(5t + 1)(t - 3) = 0$$
$$t = -\frac{1}{5} \text{ (diabaikan) atau } t = 3$$

Maka, masa apabila lembing menyentuh permukaan tanah ialah 3 saat.

4. Membuat refleksi

Fungsi $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$.

(a) Koordinat bagi tinggi maksimum:

$$t = -\frac{b}{2a}$$
$$= -\frac{14}{2(-5)}$$
$$= 1.4$$

Gantikan $t = 1.4$ ke dalam fungsi kuadratik,

$$h(1.4) = -5(1.4)^2 + 14(1.4) + 3$$
$$= 12.8$$

Maka, tinggi maksimum yang dicapai oleh lembing ialah 12.8 meter selepas 1.4 saat.

(b) Pada masa 3 saat:

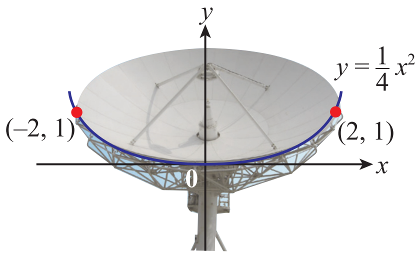
$$h(t) = -5(3)^2 + 14(3) + 3$$
$$= -45 + 42 + 3$$
$$= 0$$

Latih Diri 2.11

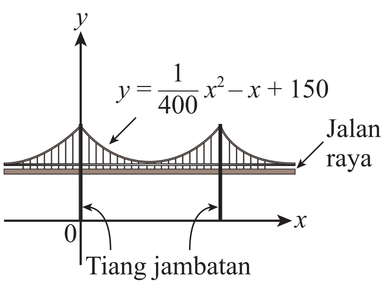
1. Fungsi $h(t) = -5t^2 + 8t + 4$ mewakili ketinggian h, dalam meter, seorang penerjun daripada permukaan air di sebuah kolam renang, t saat selepas terjun dari sebuah pelantar. Cari
   (a) tinggi pelantar dari permukaan air, dalam meter,
   (b) masa yang dicapai oleh penerjun itu pada ketinggian maksimumnya, dalam saat,
   (c) tinggi maksimum yang dicapai oleh penerjun itu, dalam meter,
   (d) julat masa selama penerjun itu berada di udara, dalam saat.

2. Sebuah terowong di lebuh raya berbentuk parabola. Tinggi lengkung parabola terowong itu, dalam meter, diberi oleh fungsi $h(x) = 15 - 0.06x^2$, dengan keadaan x ialah lebar terowong itu, dalam meter.
   (a) Tentukan tinggi maksimum terowong itu, dalam meter.
   (b) Cari lebar terowong itu, dalam meter.

3. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah satelit parabola yang fungsinya boleh diwakili oleh $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, dengan keadaan x dan y diukur dalam meter. Cari lebar dan kedalaman parabola itu, dalam meter.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan. Fungsi kabel di antara dua tiang jambatan itu boleh diwakili oleh $y = \frac{1}{400}x^2 - x + 150$, dengan keadaan x dan y diukur dalam meter. Titik minimum bagi kabel terletak di atas jalan raya di tengah-tengah dua tiang itu.
   (a) Berapakah jarak titik minimum itu dengan setiap tiang?
   (b) Berapakah tinggi jalan raya dari permukaan air?



Latihan Intensif 2.3

Imbas kod *QR* atau layari bit.ly/2Y6xlus untuk Kuiz

1. Cari nilai-nilai atau julat nilai k, jika fungsi kuadratik
   (a) $f(x) = kx^2 - 4x + k - 3$ mempunyai hanya satu pintasan-x,
   (b) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2(2k + 4)$ menyilang paksi-x pada dua titik yang berbeza.

2. Cari nilai terkecil bagi integer m dengan keadaan fungsi $f(x) = mx^2 + 7x + 3$ sentiasa positif untuk semua nilai nyata x.

3. Fungsi kuadratik f ditakrifkan oleh $f(x) = x^2 + 6x + n$, dengan keadaan n ialah pemalar.
   (a) Ungkapkan $f(x)$ dalam bentuk $(x - h)^2 + k$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.
   (b) Diberi nilai minimum bagi $f(x)$ ialah -5, cari nilai n.
   (c) Lakarkan lengkung $f(x)$.

2.3.6

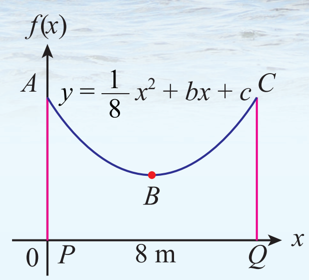
4. Cari julat nilai r dengan keadaan garis $y = rx + 4$ tidak menyilang lengkung $y = x^2 - 4x + 5$. Nyatakan nilai-nilai r dengan keadaan garis $y = rx + 4$ ialah tangen kepada lengkung $y = x^2 - 4x + 5$.

5. Terangkan kesan setiap perubahan fungsi berikut terhadap bentuk dan kedudukan graf.
(a) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 6(x - 1)^2 + 2$.
(b) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 3(x - 4)^2 + 2$.
(c) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$.

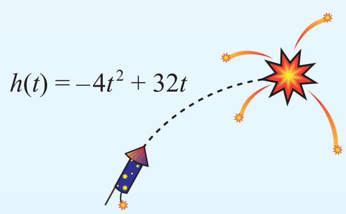
6. Ketinggian, h, dalam meter, seekor burung untuk menangkap ikan di sebuah tasik boleh diwakili oleh fungsi $h(t) = 2(t - 3)^2$, dengan keadaan t ialah masa, dalam saat, apabila burung tersebut mula bergerak untuk menangkap ikan.
(a) Lakarkan graf $h(t)$.
(b) Gerakan seekor burung lain pula diwakili oleh fungsi $r(t) = 2h(t)$. Lakarkan graf $r(t)$.
(c) Bandingkan graf $h(t)$ dengan $r(t)$. Burung yang manakah mula bergerak pada kedudukan tertinggi? Jelaskan.

7. Diberi fungsi kuadratik $f(x) = 3 - 4k - (k + 3)x - x^2$, dengan keadaan k ialah pemalar, adalah sentiasa negatif apabila $p < k < q$. Cari nilai p dan nilai q.

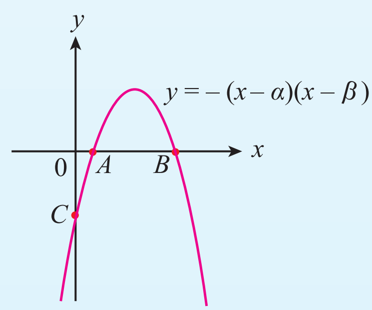
8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan PQ dengan panjang 8 m yang melintasi sebatang sungai. Kabel penyokong ABC pada jambatan itu boleh diwakili oleh fungsi $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + bx + c$, dengan keadaan b dan c ialah pemalar.
(a) Cari nilai b.
(b) Cari julat nilai c dengan keadaan titik minimum B pada kabel itu sentiasa berada di atas PQ.
(c) Cari nilai c jika B adalah 2 m di atas PQ.



9. Fungsi $h(t) = -4t^2 + 32t$ seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah mewakili tinggi, dalam meter, bunga api, t saat selepas dilancarkan. Bunga api itu meletup pada titik tertinggi.
(a) Bilakah bunga api itu meletup?
(b) Pada ketinggian berapakah bunga api itu meletup?

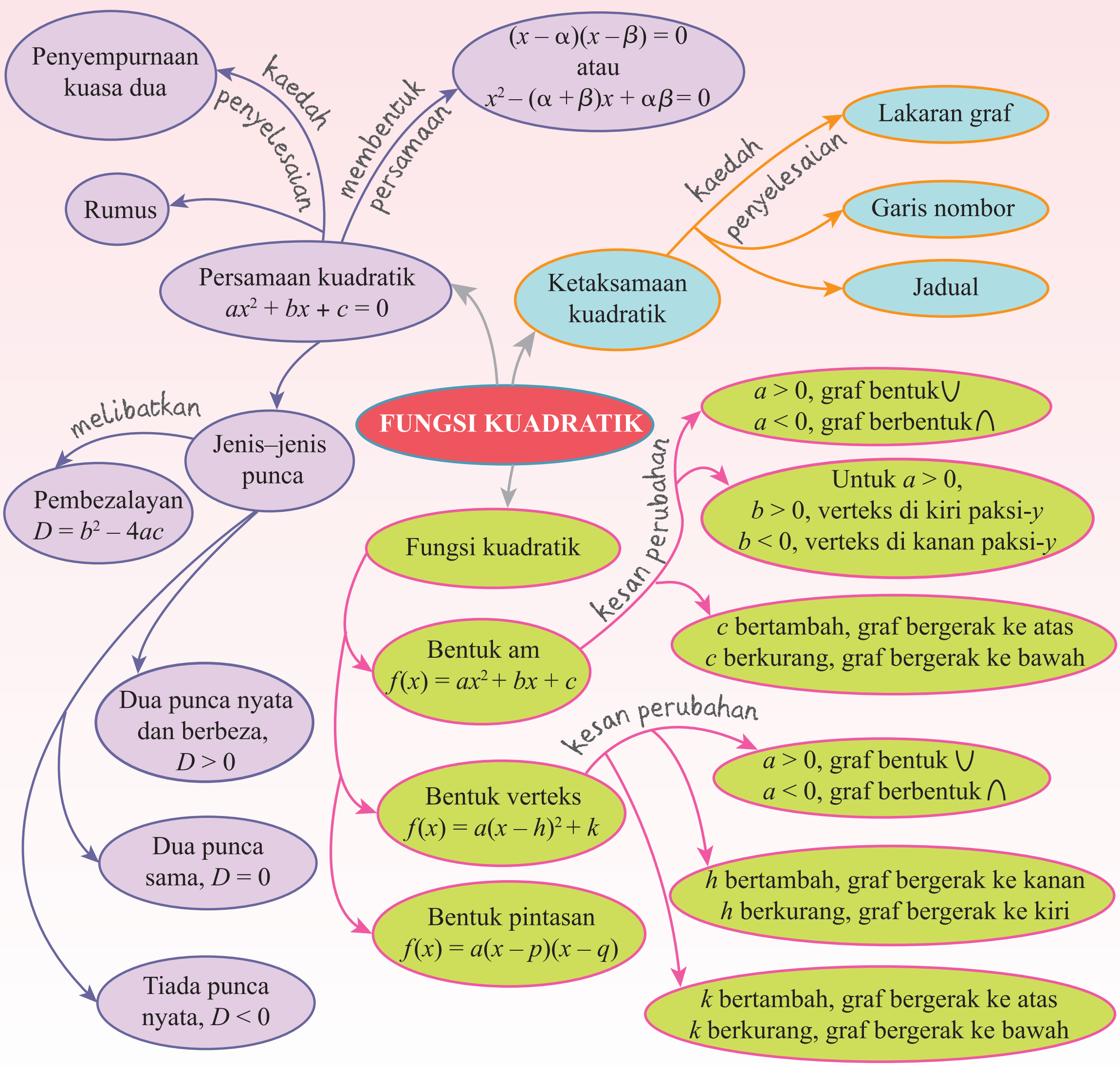


10. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $y = -(x - \alpha)(x - \beta)$, dengan keadaan $\alpha < \beta$.
(a) Diberi bahawa M ialah titik tengah bagi AB, ungkapkan panjang yang berikut, dalam sebutan α dan/atau β.
(i) OA (ii) OB
(iii) OC (iv) OM
(b) Secara geometri, bolehkah anda tafsirkan $\frac{\alpha + \beta}{2}$ dan $-\alpha\beta$ dalam rajah itu?



11. Nilai minimum bagi $f(x) = x^2 - 4nx + 5n^2 + 1$ ialah $m^2 + 2n$ dengan keadaan m dan n ialah pemalar. Tunjukkan bahawa $m = n - 1$.

RUMUSAN BAB 2



TULIS JURNAL ANDA

Perkataan kuadratik berasal daripada perkataan *quad* yang bermaksud empat tetapi suatu persamaan kuadratik melibatkan polinomial dengan kuasa tertinggi 2. Buat kajian tentang asal usul perkataan kuadratik yang berkaitan dengan persamaan kuadratik. Hasilkan satu folio grafik tentang kajian anda.

LATIHAN PENGUKUHAN

1. Selesaikan persamaan kuadratik $3x(x - 4) = (2 - x)(x + 5)$. Tulis jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan. TP2

2. Diberi persamaan kuadratik $(x - 4)^2 = 3$. TP2
(a) Ungkapkan persamaan itu dalam bentuk am, $ax^2 + bx + c = 0$.
(b) Nyatakan hasil tambah dan hasil darab punca bagi persamaan itu.
(c) Tentukan jenis punca bagi persamaan itu.

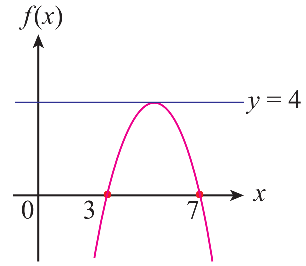
3. Cari nilai-nilai k atau julat nilai k dengan keadaan persamaan $x^2 + kx = k - 8$ mempunyai TP2
(a) dua punca yang sama,
(b) dua punca yang nyata dan berbeza,
(c) punca nyata.

4. Diberi persamaan kuadratik $3x^2 + px - 8 = 0$, dengan p ialah pemalar. Cari nilai p jika TP2
(a) satu daripada punca-punca persamaan itu ialah -2,
(b) hasil tambah punca persamaan itu ialah $\frac{1}{3}$.

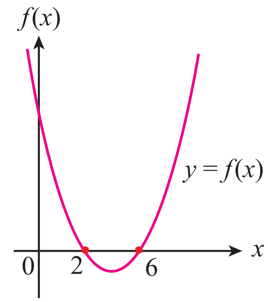
5. Diberi bahawa $3hx^2 - 7kx + 3h = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama, dengan h dan k ialah positif. Cari nisbah $h : k$ dan selesaikan persamaan tersebut. TP3

6. Cari julat nilai x bagi $x^2 - 7x + 10 > 0$ dan $x^2 - 7x \leqslant 0$. Seterusnya, selesaikan ketaksamaan $-10 < x^2 - 7x \leqslant 0$. TP5

7. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = -\frac{1}{3}[(x + p)^2 + q]$. Garis $y = 4$ ialah tangen kepada lengkung itu. Cari TP3
(a) punca-punca bagi $f(x) = 0$,
(b) nilai p dan nilai q,
(c) persamaan paksi simetri bagi lengkung itu,
(d) julat nilai x apabila $f(x)$ ialah positif.



8. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = x^2 + bx + c$, dengan keadaan b dan c ialah pemalar. Cari TP3
(a) nilai b dan nilai c,
(b) koordinat titik minimum,
(c) julat nilai x apabila $f(x)$ ialah negatif,
(d) nilai maksimum apabila graf itu dipantulkan pada paksi-x.



9. Sebuah bot menuju ke timur sejauh 24 km dengan arus 3 km/j. Perjalanan pergi dan balik mengambil masa 6 jam. Cari halaju bot, dalam km/j, jika bot itu mengekalkan halaju sekata. TP5

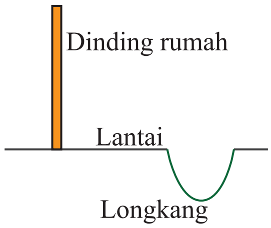
10. Sebuah buku purba China, iaitu Jiuzhang Suanshu yang bermaksud 'Sembilan Bab mengenai Seni Matematik' mengandungi masalah berikut. TP4

> "Tinggi sebuah pintu yang berbentuk segi empat tepat ialah 6.8 unit lebih daripada lebarnya dan panjang antara dua bucu bertentangan ialah 100 unit, cari lebar pintu itu".

Menggunakan rumus kuadratik, selesaikan masalah tersebut.

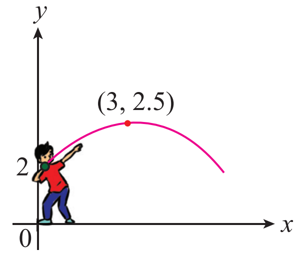
11. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas sebuah longkang yang mengelilingi sebuah rumah. Jika bentuk longkang itu diwakili oleh persamaan $y = \frac{1}{5}x^2 - 24x + 700$, cari TP5

(a) lebar bukaan longkang itu,
(b) kedalaman minimum longkang itu.



12. Pergerakan bola besi yang dilontarkan oleh Krishna dalam suatu pertandingan boleh diwakili oleh graf fungsi kuadratik seperti dalam rajah di sebelah. Bola besi itu dilontarkan pada ketinggian 2 m dan laluannya melalui titik maksimum (3, 2.5). TP4

(a) Ungkapkan persamaan laluan bola besi itu dalam bentuk $y = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan a, h dan k ialah pemalar.
(b) Cari jarak mengufuk maksimum bagi lontaran yang dilakukan oleh Krishna dalam m.



Penerokaan MATEMATIK

Fungsi bagi tiga pancutan air berbentuk parabola yang berbeza pada sebuah kolam adalah seperti berikut.

Pancutan air I: $h = -3d^2 + 4$

Pancutan air II: $h = -3.5d^2 + 3$

Pancutan air III: $h = -0.5d^2 + 1$

Bagi setiap fungsi, h meter mewakili tinggi pancutan air dan d meter ialah jarak mengufuk pancutan air itu. Berdasarkan fungsi yang diberi, jawab soalan berikut dan terangkan alasan anda.

(a) Pancutan air yang manakah mengeluarkan air daripada titik yang tertinggi?
(b) Pancutan air yang manakah mengikuti laluan yang paling sempit?
(c) Pancutan air yang manakah mempunyai jarak yang paling jauh?